ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1 (14-10-2017)

1.1 Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση
$$ay' + by = ke^{-\lambda t}.$$
όπου a, b, k είναι θετικές σταθερές και λ είναι μια μη αρνητική σταθερά. Αν y είναι μια λύση της εξίσωσης να βρεθεί το $lim_{t\to+\infty}y(t)$.

1.2 Αν f είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης
$$y'(t) + y(t) = f'(t) + f(t)$$
τείνουν προς την συνάρτηση f για $t \to +\infty$.

1.3 Να βρεθεί μια συνεχής συνάρτηση f τέτοια ώστε όλες οι λύσεις της εξίσωσης $y'(t)+y(t) = f(t)$ να τείνουν ασυμπτωτικά στο $+\infty$ προς α) την ευθεία $y = 5t+3$ β) την $y = t^2 - 2t + 5$.

1.4 Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση
$$y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$$
όπου $p, q \in [0, +\infty)$. Αν $lim_{t\to+\infty}q(t) = 0$ και υπάρχουν $t_0 \geq 0$ και $\mu > 0$ τέτοια ώστε $p(t) \geq \mu$ για όλα τα $t \geq t_0$, να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης τείνουν προς το μηδέν για $t \to +\infty$.

1.5 Ας είναι $p, q \in C([0, +\infty))$ τέτοιες ώστε
$$|p(t)| \geq |q(t)|, \quad t \geq 0,$$
και ας θεωρήσουμε τις διαφορικές εξισώσεις
$$y' + py = 0, \qquad (P)$$
$$y' + qy = 0. \qquad (Q)$$
Να εξετασθεί αν είναι ψευδής ή αληθής η πρόταση: Αν όλες οι λύσεις της εξίσωσης (Q) τείνουν προς το μηδέν για $t \to +\infty$, τότε όλες οι λύσεις της εξίσωσης (P) τείνουν προς το μηδέν για $t \to +\infty$.

1.6 Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$y'(t) + y(t) = g(t), \quad y(0) = 0,$$
με $g(t) = 2, t \in [0, 1]$, $g(t) = 0, t > 1$.